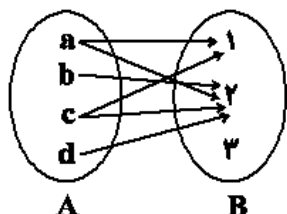




۱) با حذف چند پیکان از نمودار مقابل رابطه تبدیل به یک تابع می‌شود؟ (فقط پیکان حذف شود.)



۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲) اگر رابطه $f = \{(m^2 - 4, 5), (m^2 - 4, m^2 - 11), (8 + m, 2)\}$ تابع باشد، m کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

-۴ (۲)

۴ (۱)

۳) کدام یک از رابطه‌های زیر، یک تابع را توصیف نمی‌کند؟

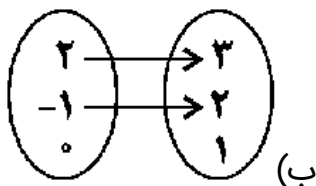
۱) رابطه‌ای که به هر فرد شماره‌ی کد ملی‌اش را نسبت می‌دهد.

۲) رابطه‌ای که به شعاع یک دایره مساحت آن را نسبت می‌دهد.

۳) رابطه‌ای که به کتاب ریاضی دهم فصل‌هایش را نسبت می‌دهد.

۴) رابطه‌ای که به طول یک فنر ثابت جرم وزنه‌هایی که به آن وصل می‌شوند را نسبت می‌دهد.

۴) چه تعداد از موارد زیر تابع نیست؟



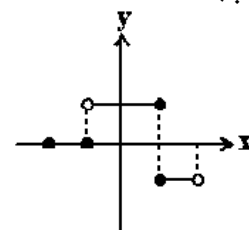
(ب)

x	۲	۰	۳	$\sqrt[3]{27}$	۳	-۱
$f(x)$	۰	-۱	۲	۱۰	۲	۰

(الف)

(ت)

پ) $\{(-1, 3), (-2, 2), (\sqrt{8}, 5), (\sqrt{-8}, 2)\}$



۴ (۴)

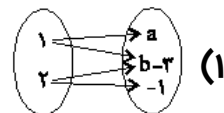
۳ (۳)

۲ (۲)

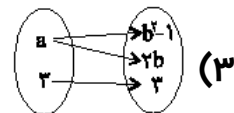
۱ (۱)

۵) اگر رابطه $f = \{(-4, 2a^2 + a), (1, 2b), (-4, a + 2), (1, 6 - b), (a, 0)\}$ یک تابع باشد، کدام یک از روابط زیر تابع نیست؟

۲) $g = \{(a + 1, 5), (2, 3), (2a + b, 5)\}$



۴) $h = \{(a, 1), (-1, 1), (b, 1)\}$



۶) در تابع $f = \{(a, b), (0, 1 + f(1)), (f(0), 2a - f(1)), (1, (f(0))^2 - f(0))\}$ مقدار b کدام است؟

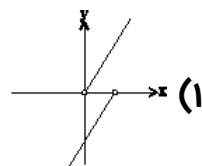
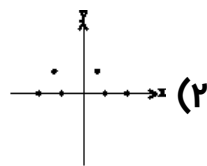
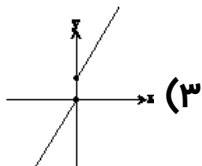
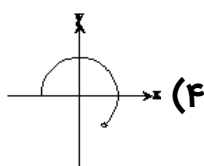
۴) ۲

۳) -۱

۲) ۱

۱) صفر

۷) کدام یک از نمودارهای زیر، یک تابع را نمایش می‌دهند؟



۸) اگر مجموعه $f = \{(-2, a), (2, 2), (1, 4), (1, b^2), (b, 5)\}$ یک تابع باشد، مقدار ab کدام است؟

۴) -۴

۳) ۴

۲) -۱۰

۱) ۱۰

۹) کدام یک از روابط زیر تابع نیست؟

۱) رابطه‌ای که به هر فرد، قد او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.

۲) رابطه‌ای که به هر، دانش‌آموز کتاب‌های درسی‌اش را نسبت می‌دهد.

۳) رابطه‌ای که به هر فرد، کد ملی‌اش را نسبت می‌دهد.

۴) رابطه‌ای که به هر فرد، وزن‌ش را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.

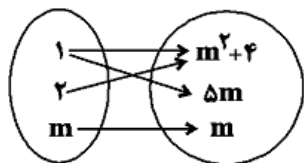
۱۰) تعداد توابع از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به مجموعه $B = \{e, f, g\}$ که شامل زوج مرتب‌های (a, f) و (b, e) باشند و زوج مرتب (d, e) را نداشته باشند، کدام است؟

۱) ۱۲

۲) ۸

۳) ۶

۴) ۹



۱۱) به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، نمودار پیکانی مقابل، نمایانگر یک تابع است؟

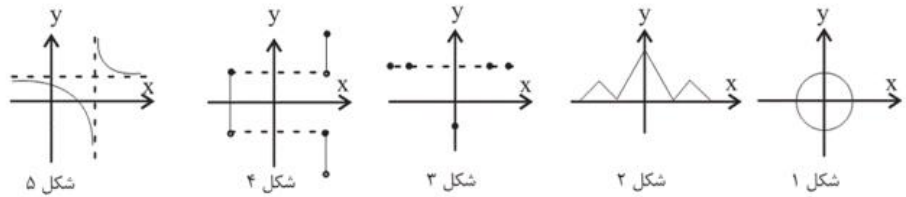
۲) $\{1, 4\}$

۱) $\{1\}$

۴) $\{\}$

۳) $\{4\}$

۱۲) چه تعداد از نمودارهای زیر نشان دهنده یک تابع هستند؟



۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۳) مساحت محصور بین نمودار دو تابع $f(x) = |x+1| - 1$ و $g(x) = 2$ کدام است؟

۶ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴)

۱۴) مساحت محصور بین تابع $y = |x-2| - 3$ و محور x ها کدام است؟

۶ (۱) ۴/۵ (۲)

۹ (۳) ۱۰/۵ (۴)

۱۵) کدامیک از رابطه‌های زیر تابع نیست؟

۱) رابطه‌ای که هر عدد را به ریشه پنجم آن مرتبط می‌کند.

۲) رابطه‌ای که طول ضلع هر مثلث متساوی‌الاضلاع را به مساحت آن مرتبط می‌کند.

۳) رابطه‌ای که هر عدد مثبت را به ریشه دوم آن مرتبط می‌کند.

۴) رابطه‌ای که مساحت هر مربع را به طول ضلع آن مرتبط می‌کند.

۱۶) کدامیک از گزینه‌های زیر، همواره یک تابع می‌باشد؟

۱) رابطه‌ای که به قد افراد یک جامعه، افراد جامعه را نسبت می‌دهد.

۲) رابطه‌ای که به طول ضلع مربع، طول قطر آن را نسبت می‌دهد.

۳) رابطه‌ای که به وزن افراد جامعه، قد آن‌ها را نسبت می‌دهد.

۴) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت، ریشه دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.

۱۷) اگر رابطه $f = \{(-1, m)(m+3, 5)(-1, m^2 - m)(3, m^2 - 4)\}$ یک تابع باشد، حاصل

$f(3)$ کدام است؟

۱ (۱) -۴ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴)

۱۸) کدام یک از روابط زیر تابع است؟

۱) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.

۲) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، دوستان او را نسبت می‌دهد.

۳) رابطه‌ای که به هر شخص، مخاطبان تلفن همراهش را نسبت می‌دهد.

۴) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.

۱۹) اگر بدانیم رابطه $f = \{(a, 5), (6, a^2 - 2), (3, -2), (6, 7), (3, b)\}$ یک تابع است،
آنگاه حاصل $\frac{f(-3)+f(3)}{f(6)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) -۱
(۳) ۱ (۴) $-\frac{3}{5}$

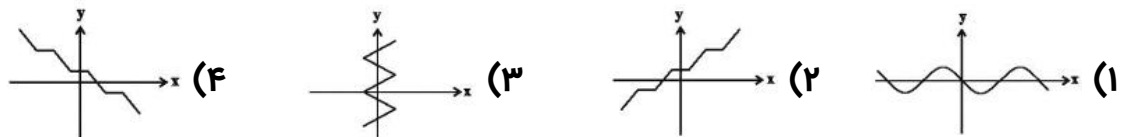
۲۰) اگر $f = \{(2, 4), (a+2, b), (2, -2a), (0, 4), (-6, 2)\}$ نمایش یک تابع باشد، حاصل
 $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۶ (۳) ۶ (۴) صفر

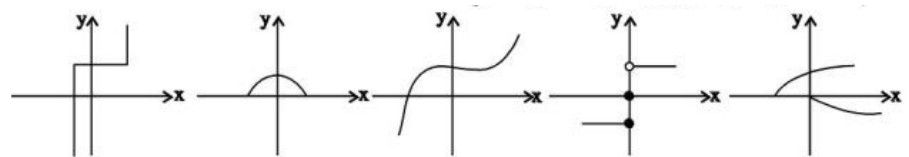
۲۱) به ازای کدام مقدار a رابطه $f = \{(a, 2), (-2, 4), (1, -2), (-2, 4a^2), (-1, 0)\}$ یک
تابع می‌باشد؟

- (۱) ۱ یا -۱ (۲) فقط -۱ (۳) فقط ۱ (۴) هیچ مقدار

۲۲) کدام یک از نمودارهای زیر، یک تابع را نمایش نمی‌دهد؟



۲۳) چه تعداد از شکل‌های زیر نشان‌دهنده یک تابع هستند؟



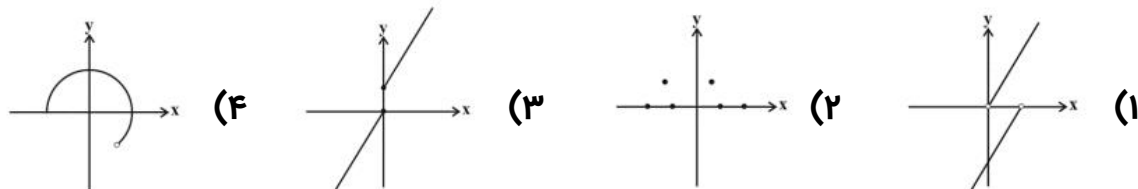
- (۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۴) رابطه $A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای
کدام مقدار m ، یک تابع است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱
(۳) ۲ (۴) صفر

۴۵) کدام یک از نمودارهای زیر، یک تابع را نمایش می‌دهند؟



۴۶) در تابع $f = \{(1, 3), (4, a^2), (a, 4), (0, 4)\}$ اگر $f(f(a)) = a$ باشد، آنگاه برای a چند مقدار مختلف وجود دارد؟

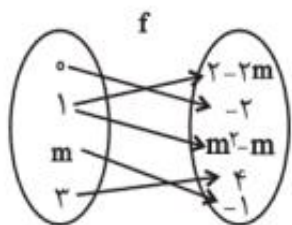
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۴۷) در کره‌ای به شعاع ۳، استوانه قائمی با ارتفاع h محاط شده است. تابع حجم استوانه بر حسب h کدام است؟

(۱) $V = \pi(6 - h^2)h$ (۲) $V = \pi(6 - h)h^2$

(۳) $V = \pi(9 - \frac{h^2}{9})h$ (۴) $V = \pi(9 - \frac{h}{9})h^2$

۴۸) اگر نمودار مقابل مربوط به تابع f باشد، حاصل عبارت $f(1) + f(3) - 2f(m)$ کدام است؟



- (۱) ۸
(۲) ۱۲
(۳) ۶
(۴) ۴

۴۹) در یک تابع خطی $f(4) = 11$ و $f(-2) = 5$ است. مساحت محصور بین تابع f و محور x ها و y ها کدام است؟

(۱) $\frac{43}{3}$ (۲) $\frac{45}{3}$ (۳) $\frac{49}{3}$ (۴) $\frac{39}{3}$

۵۰) اگر نقطه $(3, -3)$ متعلق به تابع $f = \{(2, 5), (3, 2a+1), (2, b-a), (-1, 7)\}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۱) اگر $f = \{(3, 7), (3, a^2+3), (a, 5), (2, 4), (6, b), (6, a+1)\}$ یک تابع باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) ۵

۵۲) اگر f رابطه یک تابع باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

$f = \{(1, 2m+1), (2, 5), (m, 2n-1), (1, 5)\}$

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۳۳ رابطه $\{(x+2, x^3), (-x, x^2), (x+2, x^2+2x), (2-2x, x)\}$ به ازای چند مقدار x تابع است؟

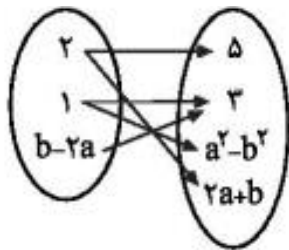
- (۱) هیچ مقدار (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۴ کدام رابطه زیر بیانگر یک تابع نیست؟

- (۱) رابطه‌ای که به هر فرد، دوستانش را نسبت می‌دهد.
 (۲) رابطه‌ای که به مساحت دایره، شعاع دایره را نسبت می‌دهد.
 (۳) رابطه‌ای که به هر فرد، قد او را در آن زمان نسبت می‌دهد.
 (۴) رابطه‌ای که به هر فرد، سال تولدش را به میلادی نسبت می‌دهد.

۳۵ رابطه $A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) هیچ مقدار m



۳۶ اگر نمودار پیکانی زیر نمایش یک تابع باشد، $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{2}{3}$

سوال ۱ گزینه درست: ۲ قلم‌چی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۶۴% ساده

گزینه «۲»

باید از هر عضو مجموعه A ، فقط یک فلش خارج شده باشد در حالی که از a و c دو فلش خارج شده است که باید از هر کدام یک فلش حذف شود. پس ۲ فلش باید حذف شود.

سوال ۲ گزینه درست: ۲ قلم‌چی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۴۷% ساده

برای تابع بودن: $m^2 - 11 = 5 \rightarrow m^2 = 16 \rightarrow m = \pm 4$

با جای‌گذاری $m = \pm 4$ فقط $m = -4$ در شرط تابع بودن صدق می‌کند.

سوال ۳ گزینه درست: ۳ قلم‌چی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۵۱% ساده

گزینه (۱): تابع است، زیرا برای هر فرد، یک شماره کد ملی وجود دارد.

گزینه (۲): تابع است، زیرا به ازای هر شعاعی، یک مساحت برای دایره وجود دارد.

گزینه (۳): تابع نیست، چون کتاب ریاضی دهم دارای ۷ فصل است.

گزینه (۴): رابطه‌ای که طول یک فنر ثابت را به وزنه‌هایی که به آن وصل می‌شوند، نسبت می‌دهد، یک تابع است.

گزینه «۳»

تک تک موارد را بررسی می کنیم.

در رابطه «الف» دو زوج مرتب $(۳, ۲)$ و $(۱۰, \sqrt[3]{۲۷})$ ، مؤلفه های اول یکسان دارند ولی چون مؤلفه های دوم آن ها برابر نیست، مورد «الف» تابع نیست.

در نمودار پیکانی «ب» چون از مؤلفه اول صفر پیکانی خارج نشده است، پس «ب» تابع نیست.

در رابطه «پ» $\sqrt[3]{-۸} = -۲$ پس دو زوج مرتب $(\sqrt[3]{-۸}, ۲)$ ، $(-۲, ۲)$ برابرند و در سایر زوج مرتب های متمایز مؤلفه های اول نابرابرند. پس رابطه «پ» تابع است.

در نمودار «ت» خطی موازی محورها وجود دارد که اگر آن را رسم کنیم نمودار را در دو نقطه قطع می کند. پس «ت» نیز تابع نیست.

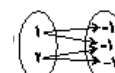
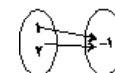
بنابراین موارد «الف»، «ب» و «ت» تابع نیستند.

گزینه «۳»

با توجه به این که رابطه f تابع است، زوج مرتب هایی که مؤلفه اولشان برابر است، مؤلفه دوم آن ها نیز باید برابر باشد:

$$۲b = ۶ - b \Rightarrow b = ۲$$

$$۲a^۲ + a = a + ۲ \Rightarrow a^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ a = -۱ \end{cases}$$

اگر $a = ۱$ باشد، رابطه f به صورت $f = \{(-۴, ۳), (۱, ۴), (-۴, ۳), (۱, ۴), (۱, ۰)\}$ در می آید که تابع نیست. اکنون با جای گذاری $a = -۱$ و در گزینه ها، تابع بودن آن ها را بررسی می کنیم:گزینه «۱»:  یا همان  تابع است.گزینه «۲»: $g = \{(۰, ۵), (۲, ۳), (۰, ۵)\}$ تابع است.گزینه «۳»:  تابع است.گزینه «۴»: $h = \{(-۱, ۱), (-۱, ۱), (۲, ۱)\}$ تابع است.

سوال ۶

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۶%

دشوار

گزینه «۲»

$$f(\circ) = 1 + f(1) = 1 + (f(\circ))^2 - f(\circ)$$

$$\Rightarrow (f(\circ) - 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(\circ) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

با داشتن $f(\circ)$ و $f(1)$ تابع زوج مرتبی f را بازنویسی می‌کنیم:

$$f = \{(a, b), (\circ, 1), (1, 2a), (1, \circ)\}$$

برای اینکه f تابع باشد، باید $(1, 2a) = (1, \circ)$ ، در نتیجه:

$$2a = \circ \Rightarrow a = \circ$$

و همچنین با داشتن مقدار a داریم:

$$(a, b) = (\circ, b) = (\circ, 1) \Rightarrow b = 1$$

سوال ۷

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۸%

ساده

در هر کدام از گزینه‌های دیگر حداقل یک خط قائم وجود دارد که نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند.

سوال ۸

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۵۵%

ساده

$$\begin{cases} (1, 4) \in f \\ (1, b^2) \in f \end{cases} \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

اما از آن‌جا که $f(2, 2) \in f$ و $(b, 5) \in f$ است، b نمی‌تواند ۲ باشد. در نتیجه $b = -2$ ، بنابراین:

$$\begin{cases} (-2, 5) \in f \\ (-2, a) \in f \end{cases} \Rightarrow a = 5 \Rightarrow ab = -10$$

سوال ۹

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۶۱%

ساده

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود، از آن‌جا که هر دانش‌آموز چندین کتاب درسی دارد، بنابراین رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز کتاب‌های درسی‌اش را نسبت می‌دهد، تابع نیست.

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۸٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۳

سوال ۱۰

گزینه «۳»

تعداد کل توابع از مجموعه A به B برابر است با:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nearrow e \\ a \rightarrow f \text{ حالت } ۳ \\ \searrow g \\ \nearrow e \\ b \rightarrow f \text{ حالت } ۳ \\ \searrow g \\ \nearrow e \\ c \rightarrow f \text{ حالت } ۳ \\ \searrow g \\ \nearrow e \\ d \rightarrow f \text{ حالت } ۳ \\ \searrow g \end{array} \right\} \Rightarrow ۳^۴ \text{ حالت}$$

ولی با شرطهای مسئله داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow f \text{ حالت } ۱ \\ b \rightarrow e \text{ حالت } ۱ \\ \nearrow e \\ c \rightarrow f \text{ حالت } ۳ \\ \searrow g \\ d \rightarrow f \text{ حالت } ۲ \\ \searrow g \end{array} \right\} \Rightarrow ۱ \times ۱ \times ۳ \times ۲ = ۶ \text{ حالت}$$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۷٪

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۳

سوال ۱۱

گزینه «۳»

در نمودار پیکانی یک تابع، از هر عضو فقط یک پیکان خارج می‌شود. چون از عضو ۱ دو پیکان خارج شده، پس باید انتهای آن‌ها یکسان باشد:

$$m^2 + 4 = 5m \Rightarrow m^2 - 5m + 4 = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ یا } m = 4$$

به‌ازای $m = 1$ دو زوج مرتب $(1, 1)$ و $(1, 5)$ را خواهیم داشت که شرط تابع بودن رابطه را نقض می‌کند. بنابراین $m = 4$ قابل قبول است.

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۰٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه های دام دار ۲

گزینه درست: ۳

سوال ۱۲

با توجه به مفهوم تابع، در شکل ۱ و ۴ نقاطی وجود دارد که به ازای یک x چند y دارند، پس تابع نیستند (در این نمودارها، خطی موازی محور y ها می‌توان رسم کرد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.) و سه شکل دیگر تابع هستند.

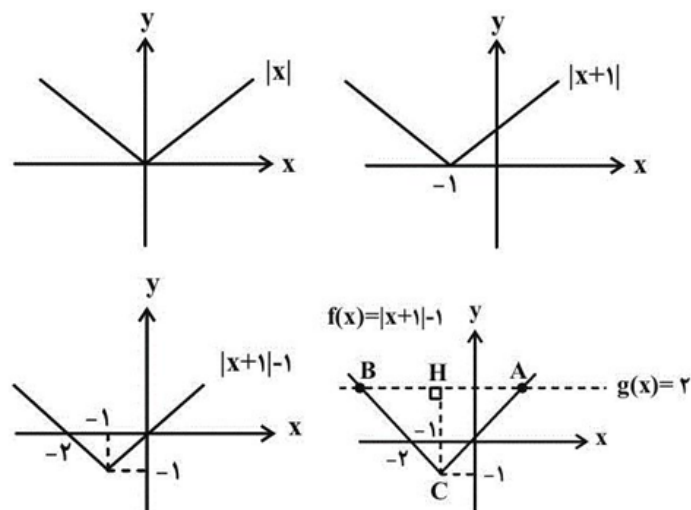
سوال ۱۳

گزینه درست: ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۰٪

متوسط



$$x \geq -1 \Rightarrow f(x) = (x+1) - 1 = x \Rightarrow A = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$x < -1 \Rightarrow f(x) = -(x+1) - 1 = -x - 2$$

$$\Rightarrow -x - 2 = 2 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow B = \begin{vmatrix} -4 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = 6 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{6 \times 3}{2} = 9$$

سوال ۱۴

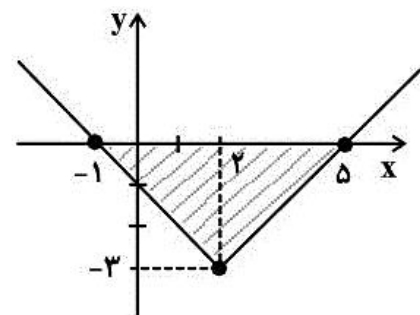
گزینه درست: ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۱٪

متوسط

گزینه «۳»



$$\text{محل برخورد با محور } x \text{ ها: } y = 0 \Rightarrow |x-2| - 3 = 0$$

$$|x-2| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x-2=3 \Rightarrow x=5 \\ x-2=-3 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

سوال ۱۵

گزینه درست: ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۹٪

ساده

از آنجایی که هر عدد مثبت دارای دو ریشه دوم است، گزینه «۳» تابع نمی‌باشد. مثلاً:

$$(9, 3), (9, -3) \in f$$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۵%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۲

سوال ۱۶

گزینه «۲»

ممکن است دو نفر دارای قد یکسان باشند. ← گزینه «۱» تابع نیست.

ممکن است دو نفر با قد متفاوت دارای وزن برابر باشند. ← گزینه «۳» تابع نیست.

هر عدد مثبت، دو ریشه دوم دارد. ← گزینه «۴» تابع نیست.

هر مربع با ضلع a ، قطری برابر $\sqrt{2}a$ دارد؛ بنابراین گزینه «۲» تابع است.

متوسط

درصد پاسخگویی ۴۱%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۳

سوال ۱۷

گزینه «۳»

در تابع f چون مولفه‌های اول دو زوج $(-1, m)$ و $(-1, m^2 - m)$ با هم برابرند، پس باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند:

$$m^2 - m = m \Rightarrow m^2 - 2m = 0$$

$$\Rightarrow m(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \Rightarrow f = \{(-1,0)(3,5)(-1,0)(3,-4)\} \\ m=2 \Rightarrow f = \{(-1,2)(5,5)(-1,2)(3,0)\} \end{cases}$$

$\downarrow$
 $f(3)=0$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۵%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۱

سوال ۱۸

با توجه به تعریف تابع گزینه «۱» صحیح است. زیرا هر فرد تنها یک گروه خونی دارد.

گزینه «۲»: هر دانش‌آموز می‌تواند چند دوست داشته باشد.

گزینه «۳»: هر شخص می‌تواند بیش از یک مخاطب در تلفن همراهش داشته باشد.

گزینه «۴»: هر عدد مثبت، دو ریشه دوم دارد.

ساده

درصد پاسخگویی ۴۸%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۱

سوال ۱۹

از آن‌جا که رابطه f تابع است، پس هیچ دو زوج مرتب متمایزی مولفه اولشان یکی نیست و در صورت یکی بودن مولفه‌های اول باید مولفه‌های دوم آن‌ها نیز برابر باشند، پس:

$$\left. \begin{aligned} (6, a^2 - 2) &\in f \\ (6, 7) &\in f \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 - 2 = 7 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$\Rightarrow \boxed{a=3} \text{ , } \boxed{a=-3}$$

قابل قبول غیر قابل قبول

توجه کنید که به ازای $a = 3$ ، دو زوج مرتب $(3, -2)$ ، $(3, 5)$ در رابطه خواهد بود که شرط تابع بودن را نقض می‌کند.

$$\left. \begin{aligned} (3, -2) &\in f \\ (3, b) &\in f \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

$$f = \{(-3, 5), (6, 7), (3, -2)\}$$

$$\frac{f(-3)+f(3)}{f(6)} = \frac{5+(-2)}{7} = \frac{3}{7}$$

برای اینکه f نمایش یک تابع باشد، نباید مؤلفه‌های اول زوج‌های متمایز یکسان باشند.

$$\Rightarrow -2a = 4 \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow f = \{(2, 4), (0, b), (2, 4), (0, 4), (-6, 2)\}$$

$$\Rightarrow b = 4 \Rightarrow a + b = 2$$

برای آن که f تابع باشد باید زوج مرتب‌هایی که مؤلفه اول برابر دارند، مؤلفه دومشان نیز برابر باشد. بنابراین:

$$(-2, 4) = (-2, 4a^2) \Rightarrow 4a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = -1$$

$$a = 1 \Rightarrow f = \{(1, 2), (-2, 4), (1, -2), (-2, 4), (-1, 0)\} \Rightarrow f \text{ تابع نیست}$$

$$a = -1 \Rightarrow f = \{(-1, 2), (-2, 4), (1, -2), (-2, 4), (-1, 0)\} \Rightarrow f \text{ تابع نیست}$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. بنابراین تنها گزینه «۳» نمایشگر یک تابع نیست.

گزینه «۲»

شکل‌های (۲) و (۳) نمایش یک تابع‌اند، زیرا هنگامی که خطی به موازات محور y ‌ها رسم می‌کنیم نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

گزینه «۲»

$$(3, m^2) = (3, m + 2) \Rightarrow m^2 = m + 2$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 2 = (m - 2)(m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow m = 2, m = -1$$

با جای‌گذاری این مقادیر m و تشکیل رابطه داریم:

$$(1) m = -1: A = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\}$$

A به ازای $m = -1$ تابع است.

$$(2) m = 2: A = \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\}$$

به ازای $m = 2$ تابع نیست. بنابراین فقط $m = -1$ قابل قبول است.

ساده

درصد پاسخگویی ۶۰٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۲

سوال ۲۵

در هر کدام از گزینه‌های دیگر حداقل یک خط قائم وجود دارد که نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند.

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۰٪

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه های دام دار ۳

گزینه درست: ۲

سوال ۲۶

گزینه «۲»

$$f(a) = ۴ \quad f(۴) = a^۲, f(f(a)) = a$$

$$\Rightarrow a^۲ = a \Rightarrow a^۲ - a = ۰ \Rightarrow a(a-1) = ۰ \Rightarrow a = ۰ \text{ یا } a = ۱$$

به ازای $a = ۱$ دو زوج مرتب $(۱, ۳)$ و $(۱, ۴)$ ایجاد می‌شوند و f تابع نیست. اما به ازای $a = ۰$ داریم:

$$f = \{(1, ۳), (۴, ۰), (۰, ۴)\}$$

دشواری

درصد پاسخگویی ۱۰٪

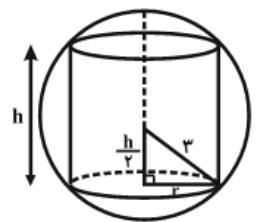
قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۳

سوال ۲۷

گزینه «۳»

شعاع استوانه را r در نظر می‌گیریم.



ابتدا حجم استوانه را بر حسب r و h می‌نویسیم:

$$V = \pi r^۲ h$$

برای به دست آوردن رابطه‌ای بر حسب r و h ، در مثلث قائم‌الزاویه رسم‌شده، از قاعده فیثاغورس کمک می‌گیریم:

$$r^۲ + \frac{h^۲}{۴} = ۹ \Rightarrow r^۲ = ۹ - \frac{h^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow V = \pi r^۲ h = \pi \left(۹ - \frac{h^۲}{۴} \right) h$$

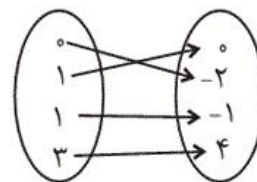
هنگامی یک رابطه تابع است که به ازای مولفه‌های اول یکسان مولفه‌های دوم آن نیز یکسان باشند.

$$\begin{cases} (1, 2-2m) \in f \\ (1, m^2-m) \in f \end{cases} \xrightarrow{f \text{ تابع است}} m^2-m=2-2m$$

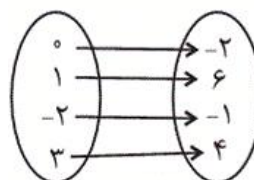
$$\Rightarrow m^2+m-2=0$$

$$\Rightarrow (m+2)(m-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=1 \end{cases}$$

اگر $m=1$ را قرار دهیم، داریم:



تابع نیست $\Rightarrow$



اگر $m=-2$ باشد، رابطه به صورت می‌شود که تابع است.

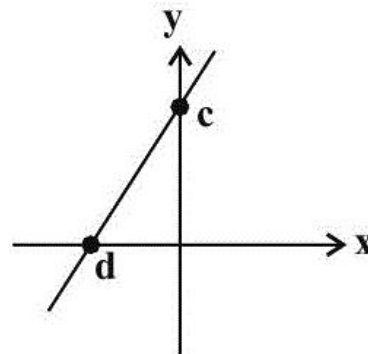
$$f(1)=6 \quad f(0)=-2 \quad f(m)=f(-2)=-1 \quad f(3)=4$$

$$\Rightarrow f(1)+f(3)-2f(m)=6+4+2=12$$

فرض می‌کنیم تابع f بصورت $f(x)=ax+b$ باشد. داریم:

$$\begin{cases} f(-2)=5 \Rightarrow 5=-2a+b \\ f(4)=11 \Rightarrow 11=4a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=7 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x+7$$

شکل این تابع بصورت زیر است. با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} c=b=7 \\ d=-7 \end{cases} \Rightarrow \text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times 7 \times 7 = \frac{49}{2}$$

سوال ۳۰

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۴%

متوسط

گزینه «۱»

در یک تابع، اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب برابر باشند، باید مؤلفه‌های دوم آنها نیز برابر باشند، لذا:

$$(۲, ۵) = (۲, b - a) \Rightarrow b - a = ۵ \quad (*)$$

از طرفی نقطه $(۳, -۳)$ متعلق به تابع f است، پس:

$$(۳, -۳) = (۳, ۲a + ۱) \Rightarrow ۲a + ۱ = -۳ \Rightarrow a = -۲$$

$$b - a = ۵ \xrightarrow{a=-۲} b + ۲ = ۵ \Rightarrow b = ۳ \quad \text{از رابطه } (*) \text{ داریم:}$$

پس:

$$a + b = -۲ + ۳ = ۱$$

سوال ۳۱

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۲%

متوسط

$$\begin{cases} (۳, a^۲ + ۳) \in f \\ (۳, ۷) \in f \end{cases} \Rightarrow a^۲ + ۳ = ۷ \Rightarrow a^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \Rightarrow f \text{ تابع نیست} \\ a = -۲ \end{cases}$$

$$a = -۲ \Rightarrow f = \{(۳, ۷), (-۲, ۵), (۲, ۴), (۶, b), (۶, -۱)\}$$

$$\Rightarrow b = -۱ \Rightarrow a + b = -۲ - ۱ = -۳$$

سوال ۳۲

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۴۵%

متوسط

گزینه «۲»

زوج مرتب‌های $(۱, ۲m + ۱)$ و $(۱, ۵)$ مولفه اول یکسانی دارند. بنابراین:

$$\begin{cases} ۲m + ۱ = ۵ \Rightarrow m = ۲ \\ (۲, ۵), (۲, ۲n - ۱) \in f \Rightarrow ۲n - ۱ = ۵ \Rightarrow n = ۳ \Rightarrow m + n = ۵ \end{cases}$$

گزینه «۲»

دو زوج مرتب با مؤلفه اول یکسان $x+2$ وجود دارد، پس برای تابع شدن رابطه، باید مؤلفه های دوم آن ها برابر باشد:

$$x^3 = x^2 + 2x \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -1 \text{ یا } x = 2$$

به ازای $x = 0$ رابطه را بازنویسی می کنیم:

تابع است. $\{(2, 0), (0, 0), (2, 0), (2, 0)\}$

به ازای $x = -1$:

تابع نیست. $\{(1, -1), (1, 1), (1, -1), (4, -1)\}$

به ازای $x = 2$:

تابع نیست. $\{(4, 8), (-2, 4), (4, 8), (-2, 2)\}$

پس تنها به ازای $x = 0$ تابع است.

گزینه «۱»: یک فرد می تواند چند دوست داشته باشد. تابع نیست.

گزینه «۲»: از روی مساحت دایره تنها یک شعاع به دست می آید. تابع است.

گزینه «۳»: هر فرد در یک زمان مشخص تنها یک قد دارد. تابع است.

گزینه «۴»: هر فرد تنها یک سال تولد به میلادی دارد. تابع است.

گزینه «۲»

برای آنکه رابطه A یک تابع باشد، باید در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مؤلفه اول برابر نداشته باشند، بنابراین:

$$(3, m^2) = (3, m+2) \Rightarrow m^2 = m+2$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 2, m = -1$$

با جاگذاری این مقادیر m و تشکیل رابطه داریم:

$$(1) \quad m = -1$$

$$\Rightarrow A = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\}$$

پس به ازای $m = -1$ تابع است. $(2) \quad m = 2$

$$\Rightarrow A = \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\}$$

رابطه به ازای $m = 2$ تابع نیست.

برای آنکه نمودار پیکانی، نمایش یک تابع باشد باید از هر عضو مجموعه اول فقط یک پیکان خارج شود. بنابراین در نمودار پیکانی داده شده باید
 $a^2 - b^2 = 3$ و $2a + b = 5$ باشد تا از عضوهای ۲ و ۱ در مجموعه اول، یک پیکان خارج شود:

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \Rightarrow b = 5 - 2a & (1) \\ a^2 - b^2 = 3 \xrightarrow{(1)} a^2 - (5 - 2a)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 - (25 + 4a^2 - 20a) = 3$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 20a + 28 = 0 \Rightarrow (3a - 14)(a - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \xrightarrow{(1)} b = 1 \\ a = \frac{14}{3} \xrightarrow{(1)} b = -\frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a + b = \frac{14}{3} - \frac{13}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

که فقط $a + b = \frac{1}{3}$ در گزینه‌ها وجود دارد.